数理解析研究所講究録
512巻 1984年 69-98

On characteristic varieties and the classification of primitive ideals in enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra

W. Borho (Univ. GH Wuppertal)
J.-L. Brylinski (Brown Univ.)
(谷崎俊之記)

講演はBorho氏が前半50分，Brylinski氏が後半50分で，内容は主に以下の§1〜§5が前半に，また§6と§3のProposition 3.1が後半に対応している。本稿では講演時間以外に両氏(特にBrylinski氏)から教わった事も含めて，なるべく完全な証明を付けるように努めた。また内容の配列や記号の使い方も必ずしも講演者のものとは一致していない。これは記録者としては越権行為かもしれないが御容赦頂きたい。尚当然ながら文中の誤りは全て記録者の責任である。

§1. primitive ideal

$\boxed{1.1}$ $\mathfrak{g}$を複素数体$\mathbb{C}$上の半単純Lie環，$U(\mathfrak{g})$を$\mathfrak{g}$のuniversal enveloping algebraとする。既約$U(\mathfrak{g})$-module Mに対してそのannihilator $\mathrm{Ann}\,M=\{u\in U(\mathfrak{g})\mid u\cdot M=(0)\}$は$U(\mathfrak{g})$の両側

ideal になるが，このような ideal を $U(\mathfrak{g})$ の <u>primitive ideal</u> という。primitive ideal の分類は近年多くの人の貢献により一応の完成をみた。それは Weyl 群に関する完全に combinatorial な言葉で述べられる。我々の目標は，この primitive ideal の分類をより幾何学的に理解する事である。簡単に説明すると，まず trivial central character を持つ primitive ideal I に対してその characteristic variety を flag manifold $G/B=\mathcal{B}$ の cotangent bundle $T^*\mathcal{B}$ の subvariety として定義する。我々の main conjecture はこの characteristic variety が既約であるというものであるが，この事から trivial central character を持つ primitive ideal はその characteristic variety により特徴付けられるという事が出てくる（see §6）。ここではこの main conjecture の証明に向けてもう少し弱い結果を示す。

$\boxed{1.2}$ 本論に入る前に，記号の導入を兼ねて primitive ideal の combinatorial な記述について簡単にみておこう。primitive ideal 全体の集合を $\mathfrak{X}$ と書く事にする。Schur の lemma により既約 $U(\mathfrak{g})$-module M は central character を持つ。すなわち $U(\mathfrak{g})$ の中心を $\mathfrak{z}$ とするとき，algebra homomorphism $\mathfrak{z} \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}$ (central character) が存在して $z|M = \chi(z)\,id_M$ $(\forall z \in \mathfrak{z})$ となる。central character χ に対して

$$\mathfrak{X}_\chi = \{\mathrm{Ann}\,M \mid M \text{ は central character } \chi \text{ を持つ既約 } U(\mathfrak{g})\text{-module}\}$$

とおくとき $\mathfrak{X} = \coprod_{\chi} \mathfrak{X}_{\chi}$ である。χ_0 を trivial central character (i.e. $\mathrm{Ker}\,\chi_0 = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{g}U(\mathfrak{g})$) として $\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{X}_{\chi_0}$ とおく。簡単のため今後 $\mathfrak{X}_0$ のみを考察する事にする。

$\boxed{1.3}$ $\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{g}$ の Borel subalgebra, $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{b}$ に含まれる Cartan subalgebra とする。$\mathfrak{b}$ に対応して $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の正 root 系を定め正 root の和の半分を ρ $(\in \mathfrak{h}^*)$ と書く。$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\lambda - \rho$ を highest weight とする Verma module を $M(\lambda)$, その simple quotient を $L(\lambda)$ とする。Duflo [D] は $\mathfrak{X} = \{\mathrm{Ann}\,L(\lambda) \mid \lambda \in \mathfrak{h}^*\}$ を示したが, 特に central character が trivial な場合を考えて次を得る。

「<u>Proposition 1.1</u> (Duflo [D])

$$\mathfrak{X}_0 = \{\mathrm{Ann}\,L(-w\rho) \mid w \in W\}$$

(但し $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の Weyl 群を W と書く。)」

「<u>Notation</u> $w \in W$ に対して

$$M_w = M(-w\rho), \quad L_w = L(-w\rho), \quad I_w = \mathrm{Ann}\,L_w$$」

$\boxed{1.4}$ そこで問題は $I_w = I_y$ となるための条件を求める事に帰着された訳だが, Joseph, Vogan はさらにこの問題が M_w の組成列を決定する事に帰着される事を示した([J1],[V])。M_w の組成列については Jantzen 等多くの人の研究があったが, Kazhdan-Lusztig [KL] がいわゆる Kazhdan-Lusztig 多項式を導入して, 組成列を具体的に書き表わす方法を予想として提出した。さらにこの Kazhdan-Lusztig 予想は Brylinski-

Kashiwara [BK], Beilinson-Bernstein [BeBe] により証明された。

という訳で，上に名前をあげた人達の結果をあわせて次を得る。

「**Theorem 1.2**

$$I_w = I_y \Longleftrightarrow w \underset{L}{\sim} y$$

（ここで $\underset{L}{\sim}$ は [KL] で定義された W 上の同値関係）」

以上により $\mathcal{X}_0$ は同値類の集合 $W/\underset{L}{\sim}$ で parametrize される事がわかった。本当は $\underset{L}{\sim}$ の定義を述べないと意味をなさないのだが，やや煩雑でまた以下の議論に直接必要ないので省略する。

§2. Beilinson-Bernstein 理論

$\boxed{2.1}$ Brylinski-Kashiwara [BK], Beilinson-Bernstein [BeBe] による Kazhdan-Lusztig 予想の証明にみられるように flag manifold 上の $\mathcal{D}$-Module（特に regular holonomic system）を考察する事が表現論のある種の問題に対して決定的役割を果す。我々の立場は，ある種の $\mathcal{D}$-Module，特にその characteristic variety を考察する事により primitive ideal の研究を行おうというものであるが，まず本節ではその基礎となる Beilinson-Bernstein 理論（$U(\mathfrak{g})$-module と $\mathcal{D}$-Module の対応）

について述べる。

$\boxed{2.2}$ G を Lie 環 $\mathfrak{g}$ を持つ半単純連結線型代数群，B を G の Borel 部分群 ($\mathrm{Lie}\,B=\mathfrak{b}$) とする。また flag variety $\mathcal{B}=G/B$ 上の algebraic differential operator のつくる層を $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ とする。G の $\mathcal{B}$ への作用により algebra homomorphism $U(\mathfrak{g})\longrightarrow\Gamma(\mathcal{B},\mathcal{D}_{\mathcal{B}})$ が定まるが，これは surjective である (cf. [BeBe])。

「<u>Definition</u> abelian category $\mathcal{M}(\mathfrak{g})$, $M(\mathfrak{g})$ を次の様に定める。

$$\mathcal{M}(\mathfrak{g}) = \{\text{coherent } \mathcal{D}_{\mathcal{B}}\text{-Module}\}$$

$$M(\mathfrak{g}) = \left\{\begin{array}{l}\text{finitely generated } U(\mathfrak{g})\text{-module with trivial}\\ \text{central character}\end{array}\right\}$$ 」

このとき，

「<u>Theorem 2.1</u> ([BeBe])

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{M}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\ \sim\ } & M(\mathfrak{g})\\ \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid\\ \mathfrak{M} & \longmapsto & \Gamma(\mathcal{B},\mathfrak{M})\\ \mathcal{D}_{\mathcal{B}}\otimes_{U(\mathfrak{g})}M & \longleftarrow\!\shortmid & M\end{array}$$ 」

$\boxed{2.3}$ H を G の closed subgroup ($\mathrm{Lie}\,H=\mathfrak{h}$) とする。

「<u>Definition</u> $U(\mathfrak{g})$-module M に，次の条件 (a) (b) (c) を満たす H の線型な作用が与えられているとき，M を (algebraic) <u>$(\mathfrak{g},H)$-module</u> という。

(a) H の M への作用は有理的。すなわち任意の $m \in M$ に対して，m を含む H−不変な部分空間 V が存在して $H \to GL(V)$ は代数群としての準同型。 有限次元

(b) (a) により H の作用を微分して Lie 環 $\mathfrak{h}$ の M への作用が定まるが，これはもともとの $\mathfrak{g}$ の M への作用を $\mathfrak{h}$ に制限したものと一致する。

(c) $\forall h \in H$, $\forall A \in \mathfrak{g}$, $\forall m \in M$ に対して

$$h \cdot (A \cdot m) = (\mathrm{Ad}(h)A) \cdot (h \cdot m)$$
⌟

⌜ Definition

$$M(\mathfrak{g}, H) = \left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{g}, H)\text{-module which is finitely generated as} \\ \text{a } U(\mathfrak{g})\text{-module and has trivial central character} \end{array} \right\}$$
⌟

次に $M(\mathfrak{g}, H)$ と対応する coherent $\mathcal{D}_B$−Module の category $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, H)$ を与える。これは Th.2.1 の対応のもとで $M(\mathfrak{g}, H)$ に対応するものと思っても差しつかえないが，一応 intrinsic な定義を述べておく。まず記号を用意する。

$$\begin{array}{ccc} H \times B & \xrightarrow{p_2} & B \\ \cup\!\!\!\!\!\!\!\!\; & & \cup \\ (h, x) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H \times B & \xrightarrow{\sigma} & B \\ (h, x) & \longmapsto & h \cdot x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H \times H & \xrightarrow{\mu} & H \\ (h_1, h_2) & \longmapsto & h_1 h_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H \times H \times B & \xrightarrow{p_{23}} & H \times B \\ (h_1, h_2, x) & \longmapsto & (h_2, x) \end{array}$$

「<u>Definition</u> $\mathcal{D}_B$-Module $\mathcal{M}$ に対して，$\mathcal{D}_{H\times B}$-Module としての同型

$$q^+\mathcal{M} \xrightarrow[\sim]{\varphi} p_2^+\mathcal{M}$$

で次の cocycle condition を満たすものが与えられているとき，$\mathcal{M}$ を <u>$(\mathcal{D}_B, H)$-Module</u> という。

$$\begin{tikzcd}
(q\circ(1_H\times q))^+\mathcal{M} \arrow[r, "(1_H\times q)^+\varphi"] \arrow[d, equal] & (p_2\circ(1_H\times q))^+\mathcal{M} \arrow[d, equal] \\
(q\circ(\mu\times 1_B))^+\mathcal{M} \arrow[ddr, "(\mu\times 1_B)^+\varphi"'] & (q\circ p_{23})^+\mathcal{M} \arrow[d, "p_{23}^+\varphi"] \\
 & (p_2\circ p_{23})^+\mathcal{M} \arrow[d, equal] \\
 & (p_2\circ(\mu\times 1_B))^+\mathcal{M}
\end{tikzcd}$$ 」

「<u>Definition</u>

$$\mathcal{M}(\mathfrak{g}, H) = \left\{\begin{array}{l}(\mathcal{D}_B, H)\text{-Module which is coherent} \\ \text{as a } \mathcal{D}_B\text{-Module}\end{array}\right\}$$ 」

「<u>Theorem 2.2</u> ([BeBe])

Th.2.1 の対応のもとで

$$\mathcal{M}(\mathfrak{g}, H) \simeq M(\mathfrak{g}, H)$$ 」

「<u>Remark 2.3</u> $(\mathcal{D}_B, H)$-Module $\mathcal{M}$ があるとき，

$q^+\mathcal{M} \xrightarrow{\varphi} p_2^+\mathcal{M}$ に対応して $\mathcal{M} \longrightarrow q_+ p_2^+\mathcal{M}$ が定まる。

この global section をとって $M \longrightarrow R(H)\otimes_{\mathbb{C}} M$ ($R(H)=\Gamma(H, \mathcal{O}_H)$, $M=\Gamma(B, \mathcal{M})$) が定まる。これが H の M への作用に対応する

$R(H)$ の M への coaction である。 ┘

§3. characteristic variety と associated variety

$\boxed{3.1}$ $\mathcal{M} \in \mathcal{M}(\mathfrak{g})$ に対してその characteristic variety $Ch(\mathcal{M})$ が, $\mathcal{B}$ の cotangent bundle $T^*\mathcal{B}$ の subvariety として定義される。簡単に定義を復習しよう。$\mathcal{M}$ の good filtration $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ に対して $gr\mathcal{D}_\mathcal{B}$-Module $gr\mathcal{M}$ が得られる。自然な射影 $T^*\mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ に対して $\pi_*(\mathcal{O}_{T^*\mathcal{B}}) = gr\mathcal{D}_\mathcal{B}$ に注意すると, $gr\mathcal{M}$ は $T^*\mathcal{B}$ 上の coherent sheaf と思える（正確には $\mathcal{O}_{T^*\mathcal{B}} \otimes_{\pi^{-1}(gr\mathcal{D}_\mathcal{B})} \pi^{-1}(gr\mathcal{M})$ を考える）。このとき $Ch(\mathcal{M}) := supp(gr\mathcal{M})$ である。また $M \in M(\mathfrak{g})$ に対しては, 対応する coherent $\mathcal{D}_\mathcal{B}$-Module $\mathcal{M} = \mathcal{D}_\mathcal{B} \otimes_{U(\mathfrak{g})} M$ の characteristic variety を M の characteristic variety と呼び $Ch(M)$ と書く。

$M \in M(\mathfrak{g})$ の good filtration を取るとき, $gr M$ は $gr U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ 上の有限生成加群である。$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ を Killing form により同一視して $gr M$ に対応する $\mathfrak{g}$ 上の coherent sheaf の support を M の associated variety と呼び, $V(M)$ と書く。

「Remark 上の使い方は [KT] の用語法とは一致していない。[KT] では $V(M)$ を M の characteristic variety と呼び, $Ch(M)$ と書いている。 ┘

$\boxed{3.2}$ B の Lie 環 $\mathfrak{b}$ の nilpotent radical を $\mathfrak{n}^+$ と書く。$\mathfrak{g}$ の Killing form $\langle\ ,\ \rangle$ について $\mathfrak{n}^+ = \{A \in \mathfrak{g} \mid \langle A, \mathfrak{b}\rangle = 0\}$ なので自然に

$$T^*\mathcal{B} = \{(gB, A) \in \mathcal{B} \times \mathfrak{g} \mid g^{-1}A \in \mathfrak{n}^+\} = G \overset{B}{\times} \mathfrak{n}^+$$

と同一視される。第2成分の射影により自然に projective morphism $T^*\mathcal{B} \xrightarrow{\gamma} \mathfrak{g}$ が得られる。

「Proposition 3.1 ([BoBr2], see [KT])

$M \in M(\mathfrak{g}) \Longrightarrow \gamma(Ch(M)) = V(M)$ 」

(記録係注 Brylinski 氏の講演では、この証明の概略も述べたが、[KT] のものと同様だったのでここでは省略する。)

$\boxed{3.3}$ G 上の involution θ が与えられているとする。K を G の部分群で $G^\theta \supset K \supset (G^\theta)_0$ なるものとする。このとき、

「Proposition 3.2

(i) ([BeBe])

$$\mathcal{M} \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}, K) \Longrightarrow \mathcal{M} \text{ は regular holonomic}$$

(ii) ([BeBe], [BK])

$$\mathcal{M} \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}, B) \Longrightarrow \mathcal{M} \text{ は regular holonomic}$$ 」

$\mathcal{M}$ が holonomic である事 (i.e. $\dim Ch(\mathcal{M}) = \dim \mathcal{B}$) は易しいが、regular holonomic である事は non-trivial である。ここでは holonomic である事のみを示す。よく知られているように、$\mathcal{B}$ 上の B-orbit は W で parametrize される。すなわち

$\mathcal{B}_w = BwB/B$ とおくとき $\mathcal{B} = \coprod_{w\in W} \mathcal{B}_w$。特に $|B\backslash\mathcal{B}| < \infty$。また [M] により $|K\backslash\mathcal{B}| < \infty$。よって次の事を示せばよい。

「**Lemma 3.3** H を G の closed subgroup とする。このとき

$$\mathcal{M} \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}, H) \Rightarrow Ch(\mathcal{M}) \subset \gamma^{-1}(\mathfrak{h}^\perp) = \coprod_{O:H\text{-orbit}} T^*_O\mathcal{B}$$

$\left(\begin{array}{l} T^*_O\mathcal{B} \text{ は } O \text{ の conormal bundle} \\ \mathfrak{h}^\perp = \{x \in \mathfrak{g} \mid \langle x, \mathfrak{h}\rangle = 0\} \end{array}\right)$

特に $|H\backslash\mathcal{B}| < \infty$ なら $\mathcal{M}$ は holonomic 」

(証明) $M = \Gamma(\mathcal{B}, \mathcal{M}) \in M(\mathfrak{g}, H)$ とする。M は有限生成なので、M の H-不変な有限次元部分空間 M_0 で $U(\mathfrak{g})\cdot M_0 = M$ なるものがある。$U(\mathfrak{g})$ の filtration $\{U_i(\mathfrak{g})\}_i$ について $M_i = U_i(\mathfrak{g})\cdot M_0$ とおくと $\{M_i\}_i$ は M の good filtration である。$A \in \mathfrak{h} = \mathrm{Lie}\,H$ のとき $A\cdot M_i \subset M_i$, よって $\mathfrak{h}\cdot \mathrm{gr}M = 0$。 $\therefore V(M) \subset \mathfrak{h}^\perp$

$\therefore Ch(M) \subset \gamma^{-1}(\mathfrak{h}^\perp) = \coprod_{O:H\text{-orbit}} T^*_O\mathcal{B}$ //

§4. G-saturation theorem

$\boxed{4.1}$ 一般に両側 $U(\mathfrak{g})$-module ($U(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})$-module) M を単に左 $U(\mathfrak{g})$-module と思ったものを M^ℓ と書く事にする。primitive ideal I_w は両側 ideal なので $U(\mathfrak{g})/I_w \in M(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})$ である。$(U(\mathfrak{g})/I_w)^\ell \in M(\mathfrak{g})$ の characteristic variety $Ch((U(\mathfrak{g})/I_w)^\ell)$ ($\subset T^*\mathcal{B}$) が我々の考察の主要対象である。

Theorem 4.1 (G-saturation theorem, [BoBr2])

$$Ch((U(\mathfrak{g})/I_w)^\ell) = G\cdot Ch(L_w) = G\overset{B}{\times} V(L_{w^{-1}})$$

($T^*\mathcal{B} = G\overset{B}{\times}\mathfrak{n}^+$ にはGが自然に作用している。また $V(L_{w^{-1}})$ が $\mathfrak{n}^+$ に含まれてB-不変な事は定義から容易に示せるが、$Ch(L_{w^{-1}}) \subset \bigsqcup_y T^*_{\mathcal{B}_y}\mathcal{B} = \gamma^{-1}(\mathfrak{n}^+)$ (∵ Lemma 3.3) と Prop. 3.1 からもわかる。)

Corollary 4.2

(i) $I_w \subset I_{w'} \Rightarrow V(L_{w'^{-1}}) \subset V(L_{w^{-1}})$

(ii) $V(L_{w'^{-1}}) \subset V(L_w) \Leftrightarrow Ch((U(\mathfrak{g})/I_{w'})^\ell) \subset Ch((U(\mathfrak{g})/I_w)^\ell)$

G/B は単連結なので

Corollary 4.3

$$\{V(L_{w^{-1}})\text{ の既約成分}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{Ch((U(\mathfrak{g})/I_w)^\ell)\text{ の既約成分}\}$$

$$V \longleftrightarrow G\overset{B}{\times} V$$

また Proposition 3.1 から

Corollary 4.4 $V((U(\mathfrak{g})/I_w)^\ell) = G\cdot V(L_w) = G\cdot V(L_{w^{-1}})$

$\boxed{4.2}$ 詳しい証明は§5にまわして、Theorem 4.1 の証明の方針を述べよう。

$G\times G$ の involution θ を $\theta(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$ により定めるとき、固定部分群は $\Delta G = \{(g,g) \mid g\in G\}$ である。$G\times G$ の flag variety $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ の ΔG-orbit への分解は

$$\mathcal{B}\times\mathcal{B} = \bigsqcup_{w\in W} Z_w \qquad (Z_w = \Delta G\cdot(wB, eB))$$

で与えられる。$\mathcal{B}$ の $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ への埋めこみ $\mathcal{B} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{B}\times\mathcal{B}$ を $j(gB)=(gB,eB)$ により定義するとき，次が成立する。

「**Proposition 4.5** j による $\mathcal{D}$-Module としての引き戻し j^* により

$$\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\Delta G) \xrightarrow[\sim]{j^*} \mathcal{M}(\mathfrak{g},B)$$ 」

「**Remark 4.6** 実はさらに

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\Delta G) & \xrightarrow[\sim]{j^*} & \mathcal{M}(\mathfrak{g},B) \\
\wr\downarrow & \circlearrowright & \wr\downarrow \\
M(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\Delta G) & \xrightarrow{\sim} & M(\mathfrak{g},B) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
H & \longmapsto & M(\rho)^\vee \otimes_{1\otimes U(\mathfrak{g})} H
\end{array}$$

である。ここで上から下に向かう２つの functor は §2 で与えられたもの。$M(\rho)^\vee$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M(\rho),\mathbb{C})$ 中の $\mathfrak{h}$-finite vector 全体のつくる $U(\mathfrak{g})$-module。なおこの事は以下の議論では用いない。」

$L_w \in M(\mathfrak{g},B)$ に対応する $\mathcal{M}(\mathfrak{g},B)$ の object を $\mathcal{L}_w$ と書く。また $\mathcal{H}_w \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\Delta G)$ を $j^*\mathcal{H}_w=\mathcal{L}_w$ により定義する。さらに $H_w=\Gamma(\mathcal{B}\times\mathcal{B},\mathcal{H}_w) \in M(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\Delta G)$ とする。すなわち Remark 4.6 の対応図まで右図のようになっているとする。

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}_w & \longleftrightarrow & \mathcal{L}_w \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
H_w & \longleftrightarrow & L_w
\end{array}$$

$\mathcal{L}_w$ は $\overline{\mathcal{B}_w}$ に support をもつ regular holonomic $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$-Module でしかも $\mathcal{M}(\mathfrak{g},B)$ 中で simple なものとして特徴付けられる([BK],[BeBe])。

同様に $\mathcal{H}_w$ は $\overline{Z_w}$ に support を持つ regular holonomic $\mathcal{D}_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}}$-Module で $\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G)$ 中で simple なものとして特徴付けられる。

Lemma 3.3 により、

$$\begin{cases} Ch(\mathcal{H}) \subset \bigcup_{w\in W} \overline{T^*_{Z_w}(\mathcal{B}\times\mathcal{B})} & (\text{for } \mathcal{H}\in\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G)) \\ Ch(\mathcal{L}) \subset \bigcup_{w\in W} \overline{T^*_{\mathcal{B}_w}(\mathcal{B}\times\mathcal{B})} & (\text{for } \mathcal{L}\in\mathcal{M}(\mathfrak{g}, B)) \end{cases}$$

であった。 そこで $\mathcal{H}\in\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G)$, $\mathcal{L}\in\mathcal{M}(\mathfrak{g}, B)$ に対して

$$\begin{cases} Ch(\mathcal{H}) = \bigcup_{w\in\Sigma_1(\mathcal{H})} \overline{T^*_{Z_w}(\mathcal{B}\times\mathcal{B})} \\ Ch(\mathcal{L}) = \bigcup_{w\in\Sigma_2(\mathcal{L})} \overline{T^*_{\mathcal{B}_w}(\mathcal{B}\times\mathcal{B})} \end{cases}$$

により W の部分集合 $\Sigma_1(\mathcal{H})$, $\Sigma_2(\mathcal{L})$ が定まる。

「<u>Proposition 4.7</u>

$\mathcal{H}\in\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G)$, $\mathcal{L} = j^*\mathcal{H}\in\mathcal{M}(\mathfrak{g}, B)$ とすると

$\Sigma_1(\mathcal{H}) = \Sigma_2(\mathcal{L})$ 」

「<u>Conjecture 4.8</u> ([BoBr 2], [KT])

$G = SL_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \Sigma_2(\mathcal{L}_w) = \{w\} \quad (\forall w\in W)$

$\left(\text{i.e. } Ch(\mathcal{L}_w) = \overline{T^*_{\mathcal{B}_w}\mathcal{B}}\right)$ 」

$\boxed{4.3}$ 一般に $H\in M(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G)$ について $H^\ell\in M(\mathfrak{g})$ である（これは定義から容易にわかるが次の Proposition からもわかる）。そこで $Ch(H)\subset T^*(\mathcal{B}\times\mathcal{B}) = T^*\mathcal{B}\times T^*\mathcal{B}$ と $Ch(H^\ell)\subset T^*\mathcal{B}$ の関係を述べよう。H, H^ℓ に対して $\mathcal{H}\in\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G)$, $\mathcal{H}^\ell\in\mathcal{M}(\mathfrak{g})$ を定めるとき、$\mathcal{H}^\ell = p_{1*}(\mathcal{H})$ である（$\mathcal{B}\times\mathcal{B}\xrightarrow{p_1}\mathcal{B}$ は projection）。

「**Remark 4.9** 蛇足であるが，一般に $X \xrightarrow{f} Y$ と $\mathcal{D}_X$-Module $\mathcal{H}$ があっても $f_+\mathcal{H}$ は $\mathcal{D}_Y$-Module にならない。上の場合は P_1 が projection なので $P_{1+}\mathcal{H}$ に $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$-Module structure が自然に決まるのである。」

「**Proposition 4.10** $\mathcal{B}\times\mathcal{B} \xrightarrow{P_1} \mathcal{B}$, $T^*(\mathcal{B}\times\mathcal{B}) = T^*\mathcal{B}\times T^*\mathcal{B} \xrightarrow{\pi_1} T^*\mathcal{B}$ を projection とする。$\mathcal{H}\in\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\Delta G)$ なら $P_{1+}(\mathcal{H})\in\mathcal{M}(\mathfrak{g})$ でしかも $Ch(P_{1+}(\mathcal{H}))\subset\pi_1(Ch(\mathcal{H}))$。」

$w\in W$ に対して $\mathfrak{m}(w) = Ad(B)(\mathfrak{n}^+\cap w(\mathfrak{n}^+))$ $(=\gamma(T^*_{\mathcal{B}_w}\mathcal{B}))$ とおく。

「**Lemma 4.11** $w\in W$ とする。

(i) $\pi_1(T^*_{Z_w}(\mathcal{B}\times\mathcal{B})) = G\cdot T^*_{\mathcal{B}_w}\mathcal{B} = G\overset{B}{\times}\mathfrak{m}(w^{-1})$

(ii) $\pi_1(\overline{T^*_{Z_w}(\mathcal{B}\times\mathcal{B})}) = \overline{G\cdot T^*_{\mathcal{B}_w}\mathcal{B}} = G\cdot\overline{T^*_{\mathcal{B}_w}\mathcal{B}} = G\overset{B}{\times}\overline{\mathfrak{m}(w^{-1})}$ 」

「**Proposition 4.12**

$H\in M(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\Delta G)$, $I = Ann(H^\ell) \Longrightarrow Ch(H^\ell) = Ch((U(\mathfrak{g})/I)^\ell)$ 」

「**Proposition 4.13** $Ann(H^\ell_w) = I_w$ $(:= Ann\, L_w)$ 」

4.4 以上の事から Theorem 4.1 が導びかれる事をみよう。

$$Ch((U(\mathfrak{g})/I_w)^\ell) = Ch(H^\ell_w) \quad (\because \text{Prop. } 4.12, 4.13)$$
$$= Ch(P_{1+}\mathcal{H}_w)$$
$$\subset \pi_1(Ch(\mathcal{H}_w)) \quad (\because \text{Prop. } 4.10)$$
$$= \bigcup_{y\in\Sigma_2(\mathcal{H}_w)} \pi_1(\overline{T^*_{Z_y}(\mathcal{B}\times\mathcal{B})})$$
$$= \bigcup_{y\in\Sigma_1(\mathcal{L}_w)} G\cdot\overline{T^*_{\mathcal{B}_y}\mathcal{B}} \quad (\because \text{Prop. } 4.7, \text{Lem. } 4.11)$$

$$= G\cdot Ch(\mathcal{L}_w)$$
$$= G\cdot Ch(L_w)$$

逆に $(U(\mathfrak{g})/I_w)^\ell \twoheadrightarrow L_w$ なので $Ch((U(\mathfrak{g})/I_w)^\ell) \supset Ch(L_w)$。

$Ch((U(\mathfrak{g})/I_w)^\ell)$ は G−不変なので $Ch((U(\mathfrak{g})/I_w)^\ell) \supset G\cdot Ch(L_w)$。

$$\therefore\ Ch((U(\mathfrak{g})/I_w)^\ell) = G\cdot Ch(L_w)$$

さて $G\cdot Ch(L_w) = \bigcup_{y\in\Sigma_2(\mathcal{L}_w)} G\cdot\overline{T^*_{\mathcal{B}_y}\mathcal{B}} = G\overset{B}{\times}\Big(\bigcup_{y\in\Sigma_2(\mathcal{L}_w)}\overline{\mathfrak{n}(y^{-1})}\Big)$ である

($\because$ Lem 4.11)。よって $V(L_{w^{-1}}) = \bigcup_{y\in\Sigma_2(\mathcal{L}_w)}\overline{\mathfrak{n}(y^{-1})}$ を示せばよい。

$$V(L_{w^{-1}}) = \gamma(Ch(L_{w^{-1}})) = \bigcup_{z\in\Sigma_2(\mathcal{L}_{w^{-1}})}\gamma(\overline{T^*_{\mathcal{B}_z}\mathcal{B}}) = \bigcup_{z\in\Sigma_2(\mathcal{L}_{w^{-1}})}\overline{\mathfrak{n}(z)}$$

なので $\Sigma_2(\mathcal{L}_{w^{-1}}) = (\Sigma_2(\mathcal{L}_w))^{-1}$ を示せばよい。よって

$\Sigma_1(\mathcal{H}_{w^{-1}}) = (\Sigma_1(\mathcal{H}_w))^{-1}$ を示せばよい。

$\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ 上の involution f を $(g_1B, g_2B)\xmapsto{f}(g_2B, g_1B)$ により定義するとき $f(Z_w) = Z_{w^{-1}}$。よって $\mathcal{H}_w$ の特徴付けから $f^*(\mathcal{H}_w) = \mathcal{H}_{w^{-1}}$。 $\therefore\ \Sigma_1(\mathcal{H}_{w^{-1}}) = (\Sigma_1(\mathcal{H}_w))^{-1}$

以上で 4.2, 4.3 で述べた事を modulo として Theorem 4.1 が証明された。

§5. Detailed proof of the G-saturation theorem.

本節では、G-saturation theorem の証明に必要だった 4.2, 4.3 における諸結果の証明を行う。

$\boxed{5.1}$ Proposition 4.5, 4.7

次の明らかな Lemma が証明の key point である。

「**Lemma 5.1** 埋めこみ $\mathcal{B} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{B}\times\mathcal{B}$ $(gB \mapsto (gB, eB))$ について，Z_w と $j(\mathcal{B})$ は transversal に交わり，$j^{-1}(Z_w) = \mathcal{B}_w$」

この事を考慮すると Proposition 4.5, 4.7 は直観的には自明のようにも思えるが，もう少し説明を加えよう。

Riemann-Hilbert 対応を用いるとわかりやすいので，まずこれについて説明する(See [K1])。今までのところ一応 algebraic な category で話をすすめているが，$\mathcal{B}$ は projective なので complex analytic な category で考えても同じである事を断わっておく (Serre の GAGA)。

一般に complex manifold X に対して，$\mathcal{D}_X$-Module (resp. $\mathbb{C}_X$-Module) の bounded complex で cohomology sheaf が regular holonomic (resp. constructible) なもののつくる derived category を $D^b_{r.h.}(\mathcal{D}_X)$ (resp. $D^b_c(\mathbb{C}_X)$) と書く。このとき

$$\begin{array}{ccc} D^b_{r.h.}(\mathcal{D}_X) & \xrightarrow[\sim]{DR} & D^b_c(\mathbb{C}_X) \\ \Psi & & \Psi \\ \mathcal{M}^\cdot & \longmapsto & DR(\mathcal{M}^\cdot) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}^\cdot) \end{array},$$

またこの対応のもとで

$$\{\text{regular holonomic } \mathcal{D}_X\text{-Module}\} \xrightarrow[\sim]{DR} \{\text{perverse complex on } X\}$$

である。さらに $X \xrightarrow{f} Y$ が holomorphic なとき

$$\begin{tikzcd} D^b_{r.h}(\mathcal{D}_Y) \arrow[r, "DR", "\sim"'] \arrow[d, "\mathbb{L}f^*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & D^b_c(\mathbb{C}_Y) \arrow[d, "f^! [-2(\dim X - \dim Y)]"] \\ D^b_{r.h}(\mathcal{D}_X) \arrow[r, "\sim"] & D^b_c(\mathbb{C}_X) \end{tikzcd}$$

(chain complex としての degree の shift)

となる。

元に戻って

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G) = \{\text{perverse complex on } \mathcal{B}\times\mathcal{B} \text{ with } \Delta G\text{-action}\} \\ \mathcal{P}(\mathfrak{g}, B) \quad = \{ \quad '' \quad \mathcal{B} \quad '' \quad B \quad '' \quad \} \end{cases}$$

とおくと，上の事から

$$\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G) \xrightarrow[\sim]{DR} \mathcal{P}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G), \quad \mathcal{M}(\mathfrak{g}, B) \xrightarrow[\sim]{DR} \mathcal{P}(\mathfrak{g}, B)$$

である。

$$\begin{cases} \{\mathcal{P}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G) \text{ の simple object}\} = \{{}^\pi\mathbb{C}_{Z_w}[-\operatorname{codim} Z_w] \mid w \in W\} \\ \{\mathcal{P}(\mathfrak{g}, B) \quad '' \quad \} = \{{}^\pi\mathbb{C}_{\mathcal{B}_w}[-\operatorname{codim} \mathcal{B}_w] \mid w \in W\} \end{cases}$$

であるが，最初に述べた Transversality (Lemma 5.1) と $\mathcal{B}\times\mathcal{B} = \coprod_w Z_w$, $\mathcal{B} = \coprod_w \mathcal{B}_w$ が Whitney stratification である事から，$j^{-1}({}^\pi\mathbb{C}_{Z_w}) = {}^\pi\mathbb{C}_{\mathcal{B}_w}$ がわかる。${}^\pi\mathbb{C}_{Z_w}$, ${}^\pi\mathbb{C}_{\mathcal{B}_w}$ は self-dual なので $j^!({}^\pi\mathbb{C}_{Z_w}[-\operatorname{codim} Z_w])[2\dim \mathcal{B}] = {}^\pi\mathbb{C}_{\mathcal{B}_w}[-\operatorname{codim} \mathcal{B}_w]$ となる。また $F^\bullet \in \mathcal{P}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G)$ なら $j^{-1}(F^\bullet)$ は B-action を持つので $j^{-1}(F^\bullet) \in \mathcal{P}(\mathfrak{g}, B)$。

従って

$$\mathcal{P}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G) \xrightarrow{j^{-1} = j^![2\dim \mathcal{B}]} \mathcal{P}(\mathfrak{g}, B)$$

でしかもこの functor は Grothendieck 群の同型を引きおこす。

よって Riemann-Hilbert 対応により $\mathbb{L}j^* = j^*$ すなわち

$\mathcal{T}or_i^{j^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}}}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}}, j^{-1}\mathcal{M}) = 0$ ($i \neq 0$, $\mathcal{M} \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G)$) で

$$\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\Delta G) \xrightarrow{j^+} \mathcal{M}(\mathfrak{g}, B)$$

は Grothendieck 群の同型を引きおこす。

よって j^+ の同値性を示すには，任意の $\mathcal{M}\in\mathcal{M}(\mathfrak{g},B)$ に対して $j^+\mathcal{H}=\mathcal{M}$ となる $\mathcal{H}\in\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\Delta G)$ の存在を示せばよい。$G\times\mathcal{B}\xrightarrow{g}\mathcal{B}$ ($(g,x)\mapsto g^{-1}x$) に対して $g^+\mathcal{M}$ を考える。B の $G\times\mathcal{B}$ への作用 $b\cdot(g,x)=(gb^{-1},x)$ に関して $g^+\mathcal{M}$ は B-action を持つ。$G\times\mathcal{B}\xrightarrow{r} G/B\times\mathcal{B}=\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ ($(g,x)\mapsto(gB,x)$) は B-principal fiber bundle なので $\mathcal{D}_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}}$-Module $\mathcal{H}$ が存在して $r^+\mathcal{H}=g^+\mathcal{M}$。また G の $G\times\mathcal{B}$ への action $g\cdot(g',x)=(gg',g\cdot x)$ に関して $g^+\mathcal{M}$ は G-action を持つので，$\mathcal{H}$ は ΔG-action を持つ。この $\mathcal{H}$ が求めるものである事は容易にわかる。以上で Proposition 4.5 が示された。

次に Proposition 4.7 を示す。$\mathcal{B}\xhookrightarrow{j}\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ により自然に

$$\begin{cases} T^*(\mathcal{B}\times\mathcal{B})\underset{\mathcal{B}\times\mathcal{B}}{\times}\mathcal{B} = (T^*\mathcal{B})\times\mathfrak{n}^+ \xrightarrow{\varphi} T^*\mathcal{B} \\ T^*(\mathcal{B}\times\mathcal{B})\underset{\mathcal{B}\times\mathcal{B}}{\times}\mathcal{B} = (T^*\mathcal{B})\times\mathfrak{n}^+ \xrightarrow{\varpi} T^*(\mathcal{B}\times\mathcal{B}) \end{cases}$$

が定まる。$\mathcal{H}\in\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\Delta G)$ なら $Ch(\mathcal{H})\subset\bigsqcup_w T^*_{Z_w}(\mathcal{B}\times\mathcal{B})$ なので $\varpi^{-1}(Ch(\mathcal{H}))\xrightarrow{\varphi}T^*\mathcal{B}$ は finite map。よって [K2] により $Ch(j^+\mathcal{H}) = \varphi(\varpi^{-1}(Ch\mathcal{H}))$ となり，Proposition 4.7 が従う。 q.e.d.

$\boxed{5.2}$ Proposition 4.10, Lemma 4.11

Lemma 5.2

$$\bigsqcup_{w\in W} T^*_{Z_w}(\mathcal{B}\times\mathcal{B}) \xrightarrow{\pi_1|\bigsqcup_w T^*_{Z_w}(\mathcal{B}\times\mathcal{B})} T^*\mathcal{B}$$

は projective morphism

(証明) $\rho=\{(x,-x)\mid x\in\mathfrak{g}\}\subset\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ とおく。

$T^*(\mathcal{B}\times\mathcal{B})=T^*\mathcal{B}\times T^*\mathcal{B}\xrightarrow{\gamma\times\gamma}\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ において

$\tilde{\rho}:=(\gamma\times\gamma)^{-1}(\rho)=\bigsqcup_w T^*_{Z_w}(\mathcal{B}\times\mathcal{B})$ である。$\gamma\times\gamma$ が projective なので、$\tilde{\rho}\longrightarrow\rho$ も projective である。ところが

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\rho} & \longrightarrow & \rho\cong\mathfrak{g} \\ & {\scriptstyle\pi_1|\tilde{\rho}}\searrow \quad \circlearrowleft \quad \nearrow{\scriptstyle\gamma} & \\ & T^*\mathcal{B} & \end{array}$$

なので $\pi_1|\tilde{\rho}$ は projective //

(Proposition 4.10 の証明) $\mathcal{H}$ の good filtration $\{\mathcal{H}_i\}$ を定めると、$p_{1*}\mathcal{H}$ の filtration $\{p_{1*}\mathcal{H}_i\}$ が定まる。仮定により $\mathrm{gr}\,\mathcal{H}$ は coherent $\mathcal{O}_{T^*(\mathcal{B}\times\mathcal{B})}$-Module，また $\mathrm{gr}(p_{1*}\mathcal{H})$ は $\mathcal{O}_{T^*\mathcal{B}}$-Module で $\mathrm{gr}(p_{1*}\mathcal{H})=\pi_{1*}(\mathrm{gr}\,\mathcal{H})$ である。ところが $\mathrm{Supp}(\mathrm{gr}\,\mathcal{H})=\mathrm{Ch}(\mathcal{H})\subset\bigsqcup_w \pi_{1*}(\mathrm{gr}\,\mathcal{H})$ なので Lemma 5.2 から $\pi_{1*}(\mathrm{gr}\,\mathcal{H})=\mathrm{gr}(p_{1*}\mathcal{H})$ は coherent $\mathcal{O}_{T^*\mathcal{B}}$-Module (Grauert の定理)。よって $p_{1*}\mathcal{H}$ は coherent $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$-Module で $\{p_{1*}\mathcal{H}_i\}$ は good filtration。 $\therefore \mathrm{Ch}(p_{1*}\mathcal{H})=\mathrm{Supp}(\pi_{1*}(\mathrm{gr}\,\mathcal{H}))\subset\pi_1(\mathrm{Ch}(\mathcal{H}))$。 //

(Lemma 4.11 の証明) (i) はすぐわかる。Lemma 5.2 により $\pi_1(\overline{T^*_{Z_w}(\mathcal{B}\times\mathcal{B})})=\overline{G\cdot T^*_{\mathcal{B}_w}\mathcal{B}}$ である。一方 $\overline{G\cdot T^*_{\mathcal{B}_w}\mathcal{B}}\supset G\cdot T^*_{\mathcal{B}_w}\mathcal{B}\supset G\overset{B}{\times}\overline{\mathfrak{n}(w^{-1})}$ だが $G\overset{B}{\times}\overline{\mathfrak{n}(w^{-1})}$ は closed なので (ii) が従う。 //

$\boxed{5.3}$ Proposition 4.12, 4.13

(Proposition 4.12 の証明)

$H = \sum_{i=1}^{n} (U(\mathfrak{g}) \otimes 1) e_i$ なる e_i をとる。このとき

$$(U(\mathfrak{g})/I)^n \longrightarrow H^\ell \quad ((P_1, \cdots, P_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} (P_i \otimes 1) e_i)$$

は $U(\mathfrak{g})$-module としての全射準同型。よって

$Ch((U(\mathfrak{g})/I)^\ell) \supset Ch(H^\ell)$。次に $H = \sum_{j=1}^{m} (1 \otimes U(\mathfrak{g})) f_j$ なる f_j をとる。このとき

$$U(\mathfrak{g}) \longrightarrow (H^\ell)^m \quad (Q \longmapsto ((Q \otimes 1) \cdot f_1, \cdots, (Q \otimes 1) f_m))$$

はやはり左 $U(\mathfrak{g})$-module としての準同型で kernel $= I$。

よって $U(\mathfrak{g})/I \hookrightarrow (H^\ell)^m$。　$\therefore Ch((U(\mathfrak{g})/I)^\ell) \subset Ch(H^\ell)$。//

Proposition 4.13 は $L_w = M(\rho)^\vee \otimes_{1 \otimes U(\mathfrak{g})} H_w$ なる事を認めれば (see Remark 4.6)，既に知られている事だが，ここでは $\mathcal{D}$-Module の言葉で直接証明しよう。

[BK] により，$\mathcal{L}_w$ は $\mathcal{H}^{\mathrm{codim}\, \mathcal{B}_w}_{\mathcal{B}_w}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}})$ の unique non-zero minimal subModule であった。同様に $\mathcal{H}_w$ は $\mathcal{H}^{\mathrm{codim}\, Z_w}_{Z_w}(\mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathcal{B}})$ の unique non-zero minimal submodule である。

Lemma 5.3　$u \in H_w - (0)$ を $\mathcal{H}_w$ の non-zero section と思うとき，ΔG の non-empty open subset U があって，

$g \in U \Longrightarrow j^*(g \cdot u) \neq 0$

(証明) $x \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{B} \xhookrightarrow{j_x} \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ を $j_x(x') = (x', x)$ により定める。このとき次を示せばよい。

"$\mathcal{B}$ の non-empty open subset V で

$x \in V \Longrightarrow j_x^{*} u$ は $j_x^{*}\mathcal{H}_w$ の non-zero section

なるものがある。"

$\mathrm{Supp}(\mathcal{H}_w)=\overline{Z_w}$, また $\mathcal{H}_w$ は $\overline{Z_w}-Z_w$ に support を持つ non-zero section を持たないので, u は Z_w 上のある点 $(g w B, gB)$ で non-zero になる。$(g w B, gB)$ での $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ の座標系 (y, z, x) を次の (i) (ii) を満たすようにとる。

(i) $y=(y_1,\cdots,y_m)=0 \Longleftrightarrow (y,z,x)\in Z_w$

(ii) x は gB での $\mathcal{B}$ の座標系を $\mathcal{B}\times\mathcal{B}\xrightarrow{p_2}\mathcal{B}$ により引き戻したものである。 $(x=(x_1,\cdots,x_m))$

そこで u を $\mathcal{H}_{Z_w}^{\mathrm{codim} Z_w}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}})$ の section と思って local に座標系で書くと

$$u=\sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\\ \alpha_i\in\mathbb{Z}_{>0}}}\frac{f_\alpha(z,x)}{y^\alpha}\,dz\,dx$$

と書ける (see [BoBr1])。各 α について $f_\alpha(z,x)\neq 0$ なる x の集合は open , また $f_\alpha\neq 0$ なら non-empty である。よって明らか //

(Proposition 4.13 の証明)

$p_{1*}(\mathcal{H}_w)$ の section を $\mathcal{H}_w$ の section と思って j により引き戻す事により, sheaf homomorphism $p_{1*}(\mathcal{H}_w)\longrightarrow \mathcal{L}_w=j^{*}\mathcal{H}_w$ が得られるが, これは $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$-Module としての準同型である。

global section をとって，$U(\mathfrak{g})$-homomorphism $H_w^\ell \longrightarrow L_w$ を得る。Lemma 5.3 によりこれは non-zero map。L_w は既約なのでさらに surjective。よって $\mathrm{Ann}\, H_w^\ell \subset \mathrm{Ann}\, L_w = I_w$。

逆に $I_w \subset \mathrm{Ann}\, H_w^\ell$ を示そう。$P \in I_w$, $u \in H_w$ のとき $Pu = 0$ を示せばよい。Lemma 5.3 から $j^*(g \cdot Pu) = 0$ $(\forall g \in \Delta G)$ を示せばよい。$j^*(g \cdot Pu) = j^*(((\mathrm{Ad}\, g)P) \cdot (gu)) = (\mathrm{Ad}(g)\, P) \cdot j^*(gu)$ だが $j^*(gu) \in L_w$, $\mathrm{Ad}(g) P \in I_w$ なので $j^*(g \cdot Pu) = 0$ //

§6. primitive ideal の characteristic variety による特徴付けと Goldie rank 多項式について

6.1 Main conjecture

我々の主予想は次のとおり。

「<u>Conjecture 6.1</u> ([BoBr2])

$Ch((U(\mathfrak{g})/I_w)^\ell)$ は既約 $(\forall w \in W)$。」

G-saturation theorem (Theorem 4.1) によりこれは次と同値。

「<u>Conjecture 6.2</u>

$V(L_w)$ は既約 $(\forall w \in W)$」

あとで述べるように，この予想が正しければ $Ch((U(\mathfrak{g})/I_w)^\ell)$ は I_w を特徴付ける事がわかるが，我々はもう少し弱い次の定理を示す。

「Theorem 6.3 ([BoBr2])

I_w は $(U(\mathfrak{g})/I_w)^\ell$ の characteristic cycle $\underline{\underline{Ch}}((U(\mathfrak{g})/I_w)^\ell)$ により一意的に決まる。すなわち

$$\underline{\underline{Ch}}((U(\mathfrak{g})/I_w)^\ell) = \underline{\underline{Ch}}((U(\mathfrak{g})/I_{w'})^\ell) \Longleftrightarrow I_w = I_{w'}$$ 」

但し characteristic cycle の定義は以下のとおり。一般に coherent $\mathcal{D}_X$-Module $\mathcal{M}$ の characteristic variety とは，$\mathcal{M}$ の good filtration に対して決まる T^*X 上の coherent sheaf $gr\mathcal{M}$ の support であった。$supp(gr\mathcal{M})$ の最大次元の既約成分の generic point での $gr\mathcal{M}$ の重複度は good filtration の取り方によらない事がわかる。この重複度までこめて考えたものを $\mathcal{M}$ の characteristic cycle と呼び $\underline{\underline{Ch}}(\mathcal{M})$ と書く。

6.2 Goldie rank 多項式

$U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal I に対して $U(\mathfrak{g})/I$ の全商環 $Fr(U(\mathfrak{g})/I)$ が $M_r(K)$ と同型になるような正整数 r と斜体 K が存在する。この r を I の Goldie rank と呼び $rk(I)$ と書く。各 $w \in W$ に対して

$$rk(\mathrm{Ann}\, L(w\mu)) = P_w(\mu) \quad \left(\begin{array}{l}\forall \mu : \text{regular, anti-dominant} \\ \text{な integral weight } (\in \mathfrak{h}^*)\end{array}\right)$$

となる $\mathfrak{h}^*$ 上の斉次多項式 P_w が定まる。この $P_w \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] = S(\mathfrak{h})$ を Goldie rank 多項式と呼ぶ。$m_w = \deg P_w$ とおく。

P_w についての Joseph の結果を述べよう。W 上の同値関係 $\underset{L}{\sim}$ を(§1 に従って) $w \underset{L}{\sim} w' \Longleftrightarrow I_w = I_{w'}$ により定める。また $w \underset{R}{\sim} w' \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} w^{-1} \underset{L}{\sim} w'^{-1}$ とし，$\underset{L}{\sim}, \underset{R}{\sim}$ の両方で生成される同値関係を $\underset{LR}{\sim}$ とする。w を含む $\underset{LR}{\sim}$ の同値類を $\mathcal{C}_w^{LR}$ と書く。

Proposition 6.4 (Joseph [J2])

(i) $w \underset{L}{\sim} w' \Longleftrightarrow P_w = cP_{w'}$ $(\exists c > 0)$

(ii) P_w は harmonic polynomial で，$\sigma(w) := \mathbb{C}[W] \cdot P_w$ $(\subset S^{m_w}(\mathfrak{h}))$ は既約 W-module。

(iii) $\dim \mathrm{Hom}_W(\sigma(w), S^m(\mathfrak{h})) = \begin{cases} 0 & (m < m_w) \\ 1 & (m = m_w) \end{cases}$

(iii) $\sigma(w) = \bigoplus_{y \in \mathcal{C}_w^{LR}/\underset{L}{\sim}} \mathbb{C} P_y$，特に $w \underset{LR}{\sim} y \Rightarrow m_w = m_y$。

(iv) $y \underset{LR}{\sim} w \Longleftrightarrow \sigma(w) = \sigma(y)$

$\boxed{6.3}$ Goldie rank 多項式と Springer 表現

$\mathcal{O}$ を nilpotent orbit $(\subset \mathfrak{g})$ とすると，いわゆる Springer 対応により既約 W-module $Sp(\mathcal{O})$ が定まり，

$\dim Sp(\mathcal{O}) = (\mathcal{O} \cap \mathfrak{n}^+$ の既約成分の数$)$ である。また

$d_{\mathcal{O}} = \frac{1}{2}(\mathrm{codim}\,\mathcal{O} - \dim \mathfrak{h})$ とおくとき

$$\dim \mathrm{Hom}_W(Sp(\mathcal{O}), S^m(\mathfrak{h})) = \begin{cases} 0 & (m < d_{\mathcal{O}}) \\ 1 & (m = d_{\mathcal{O}}) \end{cases}$$

である (Borho-MacPherson [BM1])。特に $S^{d_{\mathcal{O}}}(\mathfrak{h})$ は $Sp(\mathcal{O})$ を重複度 1 で含む。これにより $Sp(\mathcal{O})$ を $S^{d_{\mathcal{O}}}(\mathfrak{h})$ の subspace と

思う事にする。Joseph [J3] は $\mathcal{V}\in\mathcal{I}(\mathcal{O}\cap\mathfrak{n}^+)$ $:=\{\mathcal{O}\cap\mathfrak{n}^+$ の既約成分$\}$ に対して $P_{\mathcal{V}}\in S^{d_{\mathcal{O}}}(\mathfrak{h})$ を定義したが、これに関して

「**Proposition 6.5** ([J3])

(i) 各 $w\in W$ について $\mathcal{V}(L_w)$ は純次元で、その既約成分は ある nilpotent orbit $\mathcal{O}$ と、ある $\mathcal{V}\in\mathcal{I}(\mathcal{O}\cap\mathfrak{n}^+)$ に対する $\overline{\mathcal{V}}$ と一致する。

(ii) $\mathcal{V}(L_w)$ の既約成分での重複度までこめて考えたものを $\underline{\mathcal{V}}(L_w)$ とするとき、

$$\underline{\mathcal{V}}(L_{w^{-1}})=\sum_i m_i\overline{\mathcal{V}_i}\qquad(\mathcal{V}_i\in\mathcal{I}(\mathcal{O}_i\cap\mathfrak{n}^+))$$

$$\Rightarrow\ P_w=c\sum_i m_i P_{\mathcal{V}_i}\qquad({}^\exists c\neq 0)$$ 」

「**Proposition 6.6** (Hotta [H])

$$Sp(\mathcal{O})=\bigoplus_{\mathcal{V}\in\mathcal{I}(\mathcal{O}\cap\mathfrak{n}^+)}\mathbb{C}P_{\mathcal{V}}$$ 」

従って Proposition 6.4, 6.5, 6.6 により 各 $w\in W$ に対して nilpotent class $\mathcal{O}_w$ が定まって $Sp(\mathcal{O}_w)=\sigma(w)$ となる。

また次は明らか。

「**Proposition 6.7** $\underline{\mathcal{V}}(L_{w^{-1}})\in\bigoplus_{\mathcal{V}\in\mathcal{I}(\mathcal{O}_w\cap\mathfrak{n}^+)}\mathbb{Z}_{\geq 0}\overline{\mathcal{V}}$ 」

よって特に $G\cdot\mathcal{V}(L_{w^{-1}})=\overline{\mathcal{O}_w}$ だが、Cor 4.4 から、

Theorem 6.8 (primitive ideal の associated variety の既約性, [BoBr1], [J4], [KT])

$$\mathcal{V}((U(\mathfrak{g})/I_w)^\ell) = \overline{\mathcal{O}_w}$$

この定理は [BoBr1] で case by case で証明されていたが，上述の Joseph, Hotta, Borho-MacPherson の定理と我々の G-saturation theorem を組み合わせる事により，統一的証明が得られた (see [J4], [KT])。

なお上のようにして得られた $\mathcal{O}_w$ が nilpotent orbit 全てをつくす訳ではない。$\mathcal{O}_w$ の全体と Lusztig の意味の special nilpotent orbit 全体が一致している事が知られている。

$\boxed{6.4}$ Main conjecture 再論

nilpotent orbit $\mathcal{O}$ に対して $\mathcal{I}(\mathcal{O}\cap\mathfrak{n}^+) = \{\mathcal{V}_1, \cdots, \mathcal{V}_k\}$ とすると，$T^*\mathcal{B} \xrightarrow{\gamma} \mathfrak{g}$ で $\gamma^{-1}(\mathcal{O}) = G \overset{B}{\times} (\mathcal{O}\cap\mathfrak{n}^+)$ となるので

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}(\mathcal{O}\cap\mathfrak{n}^+) & \xleftrightarrow{1:1} & \mathcal{I}(\gamma^{-1}(\mathcal{O})) := \{\gamma^{-1}(\mathcal{O}) \text{ の既約成分}\} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathcal{V}_i & \longleftrightarrow & G \overset{B}{\times} \mathcal{V}_i \end{array}$$

となる。

いま Conjecture 6.1 が正しいとする。このとき $\mathcal{V}(L_{w^{-1}})$ は既約なので Proposition 6.7 から $\mathcal{V}(L_{w^{-1}}) \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_w\cap\mathfrak{n}^+)$ となり，これは I_w のみに depend する。よって Proposition 6.4

(iv) (v) と Proposition 6.6, Theorem 4.1 から Conjecture 6.1 は次のように言い直せる。

「Conjecture 6.9 ([BoBr2])

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{X}_0 & \xleftrightarrow{\ 1:1\ } & \{\overline{\gamma^{-1}(\mathcal{O})} \text{ の既約成分} \mid \mathcal{O} : \text{special}\} \\
\cup & & \cup \\
I & \longleftrightarrow & X
\end{array}
$$

$$\left(Ch((U(\mathfrak{g})/I)^e) = \overline{X} \right)$$

」

$\boxed{6.5}$ Goldie rank 多項式の幾何学的意味

一般に algebraic variety X 上の coherent sheaf のつくる abelian category の Grothendieck 群を $K(X)$ と書く。(簡単のため係数環は $\mathbb{C}$ とする。) よく知られているように $K(\mathcal{B}) \cong H^*(\mathcal{B}, \mathbb{C}) \cong \{\text{harmonic polynomial}\}$ である。

「Proposition 6.10 ([BoBr2] or [BM2])

$K_w = \mathcal{D}_{\mathcal{B}} \otimes_{U(\mathfrak{g})} ((U(\mathfrak{g})/I_w)^e)$ とおくとき

$$
\begin{array}{ccc}
K(T^*\mathcal{B}) & \xrightarrow{\ \sigma^*\ } & K(\mathcal{B}) \cong \{\text{harmonic polynomial}\} \\
\cup & & \cup \\
[\operatorname{gr} K_w] & \longmapsto & \underset{\neq 0}{(\text{constant})}\, p_w
\end{array}
$$

$(\mathcal{B} \xrightarrow{\ \sigma\ } T^*\mathcal{B}$ は zero section への埋め込み$)$ 」

これと Prop 6.4 (i) から定理 6.3 が従う。

（記録係注）Proposition 6.10 の証明はわかりませんでした。また本節の他の部分についても記録係の独断で証明を付けましたので，講演者の意図するところとは違うかもしれません。特に Goldie rank 多項式に関する Joseph の結果を用いる部分は，Proposition 6.10 のようなより幾何学的考察から出てくるのかもしれません。

参考文献

[BeBe] Beilinson, A. and Bernstein, J. : Localisation de g-modules ; Comptes Rendus , 292, 15–18 (1981).

[BoBr1] Borho, W. and Brylinski, J.-L. : Differential operators on homogeneous spaces I ; Invent. math. 69, 437–476 (1982).

[BoBr2] ——— and ——— : ——————— III ; to appear

[BM1] ——— and MacPherson, R. : Représentations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les variétés de nilpotents ; Comptes Rendus, 292, 707–710 (1981).

[BM2] ——— and ——— : to appear.

[BK] Brylinski, J.-L. and Kashiwara, M : Kazhdan–Lusztig conjecture and holonomic systems ; Invent. math. 64, 387–410 (1981).

[D] Duflo, M.: Sur la classification des idéaux primitifs dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple; Ann. Math. 105, 107–120 (1977).

[H] Hotta, R.: On Joseph's construction of Weyl group representations; preprint (1982).

[J1] Joseph, A: W-module structure in the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra; Springer LNM 728, 116–135 (1979).

[J2] ——: Goldie rank in the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra I, II; J. Alg. 65, 269–316 (1980).

[J3] ——: On the variety of a highest weight module; to appear in J. Alg.

[J4] ——: On the associated variety of a primitive ideal; preprint (1983).

[K1] Kashiwara, M.: The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems; preprint (1983).

[K2] ——: Systems of microdifferential equations; Progress in Math 34. Birkhaüser, 1983.

[KT] —— and Tanisaki, T.: The characteristic cycles of holonomic systems on a flag manifold –related to the Weyl group algebra–; preprint (1983).

[KL] Kazhdan, D. and Lusztig, G. : Representations of Coxeter groups and Hecke algebras ; Invent. math. 53, 165—184 (1979).

[M] Matsuki, T. : The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups ; J. Math. Soc. Japan 31, 331—357 (1979).

[V] Vogan, D. : Ordering of the primitive spectrum of a semisimple Lie algebra ; Math. Ann. 248 195—203 (1980).